



Universidad Nacional Autónoma de México  
Colegio de Ciencias y Humanidades  
Área Matemáticas

Programa de Estudios  
de Matemáticas IV



## **PROGRAMA DEL CUARTO SEMESTRE DE MATEMÁTICAS ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA**

### **UBICACIÓN DEL CURSO**

En Matemáticas IV, por medio del estudio de diversas clases de funciones, se consolidan e integran conceptos y procedimientos de los ejes temáticos que el alumno ha venido asimilando en los cursos anteriores, tanto en el manejo de expresiones algebraicas y del plano cartesiano, como en el estudio de relaciones numéricas entre objetos geométricos. Corresponde a este semestre profundizar y ampliar el concepto de función; identificar sus elementos; incorporar la notación funcional; realizar un análisis cualitativo en el que se establecen relaciones entre los parámetros de la representación algebraica, la gráfica y la forma de variación de la función en cuestión; explorar simetrías y transformaciones en el plano e introducir la noción de función inversa y con ello, fomentar el desarrollo de la reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o de un proceso de pensamiento). Las funciones que se estudian corresponden a distintos tipos de variación, lo que permite mostrar al alumno una amplia gama de aplicaciones de esta importante herramienta matemática.

Por otra parte, también se avanza en los ejes metodológicos y en el desarrollo de habilidades, ya que a través de las cuatro unidades que integran el cuarto semestre, el estudiante trabajará con conceptos de mayor abstracción, establecerá generalizaciones, obtendrá modelos algebraicos, analizará comportamientos, combinará procedimientos, determinará parámetros, interpretará gráficas y resultados, dándoles sentido dentro del contexto de la situación que está modelando.

Así, este curso constituye un momento de síntesis y culminación de una etapa tanto en lo temático como en lo metodológico; a la vez, prepara el inicio de otra, en donde el concepto de función jugará un papel importante en el estudio del cálculo, la estadística y otras disciplinas.

El tratamiento de los contenidos de Matemáticas IV, está enfocado a ir entretejiendo nuevos conocimientos con actividades (tanto concretas como intelectuales) que lleven al alumno a apropiarse del conocimiento, de modo que el curso no se convierta en una

serie de definiciones y recetas de manipulación que se deben memorizar sobre los diversos tipos de funciones. Por el contrario, se está pensando en un manejo dinámico de los contenidos que le permita al alumno, al final del curso, identificar el comportamiento que caracteriza a una situación o fenómeno de variación y estar capacitado para construir el modelo que mejor lo describa.

Como ya se comentó para el caso de la geometría analítica, es recomendable el uso de algún *software* como (*Geolap, Cabri, Derive*, etcétera.) ya que favorece que el alumno explore las características de los diversos tipos de funciones, reconozca patrones de comportamiento, formule conjeturas, establezca relaciones entre la gráfica y los parámetros presentes en su regla de correspondencia, etcétera.

## **PROPÓSITOS DEL CURSO**

Al finalizar el cuarto curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolución de problemas, al conocer y manejar nuevas herramientas para modelar y analizar situaciones y fenómenos que se pueden representar con las funciones estudiadas en este curso.
- ✍ Enriquece y utiliza de manera integrada, diversos conceptos y procedimientos de la aritmética, el álgebra, la trigonometría, las geometrías euclidiana y analítica en el estudio y modelación del tipo de funciones trabajadas en este curso.
- ✍ Modela diversas situaciones que involucran variación funcional y a través del análisis del comportamiento de la función respectiva, obtiene información y conclusiones sobre la situación modelada.
- ✍ Consolida su manejo del plano cartesiano, a través de la graficación de funciones, y el dominio de la vinculación entre los parámetros y las características de la gráfica asociada.
- ✍ Obtiene conclusiones sobre el comportamiento de las funciones estudiadas y es capaz de distinguir el tipo de variación que las caracteriza.

- ☞ Comprende y maneja el concepto de función, así como el sentido e interrelación de subconceptos, características y procedimientos asociados a él.

## CONTENIDOS TEMÁTICOS

Nº.	Nombre de la Unidad	Horas
I	Funciones Polinomiales.	20
II	Funciones Racionales y con Radicales.	20
III	Funciones Trigonómicas	20
IV	Funciones Exponenciales y Logarítmicas	20

## BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Barnett Raymond, *et al.* *Álgebra*, Mc Graw-Hill Interamericana, México, 2000.

Barnett Raymond, *et al.* *Precálculo: Funciones y Gráficas*, Mc Graw-Hill, México, 2000.

Jonson, Murphy, y Steffensen, Arnold. *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones*, Trillas, México, 1998.

Larson, Ronald, Hostetler, Robert. *Álgebra*, Publicaciones Cultural, México, 1996.

Leithold, Louis. *Matemáticas previas al cálculo: Análisis Funcional y Geometría Analítica*, Harla, México, 1996.

Sullivan, Michael. *Precálculo*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.

Swokowski, Earl w., *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002

Rodríguez, Francisco, *et al.* *Paquete Didáctico para Matemáticas III. Guía del Profesor*, CCH Oriente, UNAM, México, 2002.

## MATEMÁTICAS IV. UNIDAD I. FUNCIONES POLINOMIALES

### Propósitos:

- ✍ Avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango. Profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de una función polinomial, su comportamiento, aspecto y características principales de su gráfica.

**TIEMPO:** 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
<p>El alumno:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>? Explora en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relaciones o comportamientos, que le permitan obtener información y sean útiles para establecer la representación algebraica.</li> <li>? Modela situaciones que den lugar a una función polinomial.</li> <li>? Establece la noción de función enfatizando la idea de expresar, sujeto a una condición, una cantidad en términos de otra.</li> <li>? Examina ecuaciones algebraicas con dos variables o su gráfica para decidir si se trata de una función o no.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>? Se recomienda iniciar con problemas de áreas y volúmenes que dan lugar a funciones de segundo y tercer grado; analizar, en el contexto del problema dado, el comportamiento de la función y su gráfica.</li> <li>? Se sugiere que el profesor realice un bosquejo histórico de la evolución del concepto de función.</li> <li>? Es conveniente que en el salón de clase el alumno obtenga las gráficas de las funciones:  <math>f(x) \sim x^3</math>, <math>f(x) \sim x^4</math>, y que como tarea extra clase dibuje las gráficas de <math>f(x) \sim x^5</math> y <math>f(x) \sim x^6</math> con el objeto de que visualice la relación que existe entre el exponente y el signo del término de mayor grado de la expresión polinomial, respecto a la concavidad de la gráfica, y a la vez, distinga la extensión del dominio y del rango correspondiente a cada función tratada.</li> </ul>	<p>Situaciones que dan lugar a una función polinomial.</p> <p>Noción generalizada de función.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Relación entre dos variables que cumple ciertas condiciones.</li> <li>b) Conjuntos asociados: dominio y rango.</li> <li>c) Regla de correspondencia.</li> <li>d) Notación funcional <math>f(x)</math>.</li> </ul> <p>Concepto de función polinomial</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Notación <math>f(x) = a_n x^n + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0</math></li> <li>b) Grado de una función polinomial.</li> </ul>

<p>? Proporciona el dominio y rango de una función polinomial dada.</p> <p>? Comprende el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.</p> <p>? Relacionará a la ecuación</p> $a_n x^n ? \dots ? a_3 x^3 ? a_2 x^2 ? a_1 x ? a_0 ? 0$ <p>como un caso particular de la función polinomial asociada.</p> <p>? Resuelve ecuaciones polino-miales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.</p> <p>? Identifica los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada.</p> <p>? A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella.</p> <p>? Determina la concavidad de la gráfica en funciones del tipo <math>f(x) = ax^n + c</math>, en base al signo de <math>a</math> y a la paridad de <math>n</math>.</p>	<p>? Se sugiere retomar lo que el alumno ya vio para funciones lineales y cuadráticas y extenderlo a las propiedades de las funciones polinomiales de grado mayor a dos haciendo hincapié en que:</p> <p>a) Los ceros de una función son las soluciones o raíces de la ecuación <math>f(x) = 0</math>, y corresponden a las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas, además de la relación que existe entre los factores del polinomio y los ceros de la función polinomial.</p> <p>b) La relación existente entre el término independiente de la ecuación, con el punto donde la gráfica de la función correspondiente intersecta el eje de las ordenadas.</p> <p>c) Cuando se le suma o resta un número a la variable de la función, su gráfica sufre una translación horizontal sobre el eje de las abscisas.</p> <p>d) Cuando se le suma o resta un número a la función, su gráfica sufre una translación vertical sobre el eje de las ordenadas.</p> <p>e) Cuando se multiplica a la función por un número real, puede cambiar la concavidad y el índice de crecimiento.</p>	<p>c) Gráfica de funciones polinomiales de la forma:</p> $f(x) = ax^2 + c \text{ con } a, c ? ?$ $f(x) = ax^4 + c \text{ con } a, c ? ?$ <p>Métodos de exploración para la obtención de los ceros, aplicable a las funciones polinomiales factorizables de grado 3 y 4.</p> <p>a) División de polinomios</p> <p>b) División sintética.</p> <p>c) Teorema del residuo</p> <p>d) Teorema del factor y su recíproco.</p> <p>e) Divisores del término independiente</p> <p>f) Identificación de tipos de raíz: Enteras, racionales, reales, complejas y su multiplicidad.</p> <p>Bosquejo de la gráfica de una función polinomial.</p> $f(x) ? a_n x^n ? \dots ? a_3 x^3 ? a_2 x^2 ? a_1 x ?$ <p>a) Intersecciones de la gráfica con los ejes cartesianos.</p> <p>b) Análisis del comportamiento: Valor de <math>a_n</math> Concavidad</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>? Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma.</p> <p>? Bosqueja la gráfica de funciones polinomiales a partir del comportamiento local y al infinito.</p> <p>? Resuelve problemas de aplicación.</p>	<p>? Se recomienda el uso de la computadora para construir las gráficas de las funciones utilizando software como <i>Excel</i>, <i>Derive</i>, <i>Cabri</i>, etcéteraétera.</p> <p>? Se sugiere considerar y comentar como aspecto histórico, el Teorema Fundamental del Álgebra y las aportaciones de Abel y Galois.</p>	<p>Índice de crecimiento (alargamiento o compresión).</p> <p>c) Traslación horizontal y vertical:</p> $f(x \pm k), f(x) \pm k$ <p>d) Noción de intervalo.</p> <p>e) Intervalos donde <math>f(x)</math> es positiva. <math>f(x)</math> es negativa.</p> <p>f) La no-interrupción de la gráfica.</p> <p>Problemas de aplicación</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## UNIDAD II. FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

### Propósitos:

- ✍ Continuar con el estudio de las funciones, a través de las funciones racionales y con radicales. Analizar su comportamiento en el que cobra relevancia identificar su dominio de definición, su rango y los puntos de ruptura.

**TIEMPO : 20 horas**

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
<p>El alumno:</p> <p>En relación a funciones racionales</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>? Explora situaciones o problemas que dan lugar a una función racional, en particular las que involucran variación inversa o inversamente proporcional al cuadrado de la variable. Analiza las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.</li> <li>? Establece la regla de correspondencia de una función racional, asociada a un problema.</li> <li>? A partir de la regla de correspondencia de una función racional, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica e identifica su(s) punto(s) de ruptura y asíntotas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>? Se sugiere iniciar la unidad con fenómenos de variación inversamente proporcional tales como: a) variación de la presión respecto al volumen de un gas a temperatura constante; b) velocidad en relación al tiempo en una distancia constante; y c) tiempo de realización de un trabajo con variación de trabajadores, etcéteraétera. Después se pueden presentar, por ejemplo, las leyes de Coulomb y de la Gravitación Universal.</li> <li>? Es conveniente introducir la noción de intervalo con el objeto de establecer el dominio y rango restringidos por las condiciones del problema y construir una tabla adecuada para su gráfica. Hay que hacer énfasis en la imposibilidad de la división por cero. Lo anterior permite hacer un análisis global de la función; es útil hacer preguntas sobre la interpolación y extrapolación de valores.</li> </ul>	<p>Funciones Racionales</p> <p>Situaciones que dan lugar a funciones racionales.</p> <p>Noción de intervalo en la recta real.</p> <p>Estudio del comportamiento analítico y gráfico; local y al infinito por medio del dominio y rango de las funciones del tipo:</p> $f(x) \sim \frac{a}{x \cdot b} \quad ? \dots f(x) \sim \frac{a}{(x \cdot b)^2} \quad ? c$ $f(x) \sim \frac{P(x)}{Q(x)}; \text{ con } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ lineales o cuadráticas, con } a, b \text{ y } c \text{ ? ?}$



<p>? Identifica el dominio de definición y el rango de una función racional, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.</p> <p>? Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica de una función racional, y obtiene conclusiones sobre el problema correspondiente.</p> <p>? Resuelve problemas sobre valores extremos, en una función racional, por medio de una aproximación numérica.</p> <p>Respecto a funciones con Radicales:</p> <p>? Explora en una situación o problema que da lugar a una función con radicales, las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.</p> <p>? Establece la regla de correspondencia de una función con radicales, asociada a un problema.</p> <p>? A partir de la regla de correspondencia de una función con radicales, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica.</p>	<p>? Ayudan problemas como la construcción de una lata cilíndrica de volumen dado que requiere determinar las dimensiones que permiten utilizar el mínimo de material, Para ello, se puede llevar al alumno a encontrar una primera aproximación por medio de valores enteros y posteriormente por medio de valores con decimales (décimos, centésimos o milésimos).</p> <p>? Para las funciones con radicales, es útil presentar problemas como el de hallar la distancia mínima entre dos móviles que se separan en direcciones perpendiculares o problemas que utilicen el Teorema de Pitágoras.</p> <p>? También conviene establecer la necesidad de resolver desigualdades para identificar el dominio de este tipo de funciones, sin caer en un estudio riguroso de las mismas</p> <p>? Se puede apoyar el desarrollo de la unidad, haciendo uso de la computadora para recabar datos experimentales, aritméticos, gráficos y algebraicos, a través de software como:  <i>Cabri</i>  <i>Excel.</i>  <i>WinPlot.</i>  <i>Derive</i>  <i>Máxima</i>, entre otros.</p>	<p>Funciones con Radicales</p> <p>Situaciones que dan lugar a funciones con radicales del tipo</p> $f(x) = \sqrt{ax + b};$ $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ <p>Estudio analítico y gráfico del dominio y el rango de una función del tipo anterior.</p> <p>Resolución de problemas con fenómenos de diversa índole (geométricos y físicos), susceptibles de modelarse a través de funciones racionales o con radicales.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>? Identifica el dominio y rango de una función con radicales, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.</p> <p>? Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica, de una función con radicales, y obtendrá conclusiones sobre el problema correspondiente.</p> <p>? Resuelve problemas sobre valores extremos, por medio de aproximaciones numéricas en las cuales se utilicen funciones con radicales.</p>	<p>Este trabajo puede ser complementado con investigaciones de los alumnos respecto a algunas leyes o fenómenos físicos que se expresan con funciones racionales o con radicales.</p>	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

## UNIDAD III. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

### Propósitos:

- ✍ Extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Reforzar el análisis de las relaciones entre gráfica y parámetros que se ha venido realizando, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.

**TIEMPO : 20 horas**

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
<p>El alumno:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>? Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diagramas, tablas, expresiones algebraicas, etcétera que le permitan obtener información de ello, como un paso previo al establecimiento de conceptos, y al manejo de las representaciones pertinentes.</li> <li>? Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.</li> <li>? Identifica el ángulo, como una rotación de un radio de un círculo. Lado inicial y lado final.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>? Tanto al inicio como en el desarrollo de la temática, es útil incorporar ejemplos de fenómenos de comportamiento periódico, cuya modelación involucra fundamentalmente seno y coseno que se refieran a contextos diversos que despierten interés en el alumno, como pueden ser: ondas sonoras, encefalogramas, ciclo de la respiración, estudio de las mareas, biorritmo, corriente alterna, intensidad de la luz diurna etcétera.</li> <li>? Recordar el concepto de ángulo, la forma en que se mide, hablar de radianes y ángulos negativos.</li> <li>? Invitarlos a construir una tabla que relacione los ángulos de 30°, 45°, 60°, 90° y 180°, por ejemplo, con sus respectivos valores en radianes.</li> </ul>	<p>Situaciones que involucran variación periódica.</p> <p>Generalización, en el plano cartesiano, de las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Círculo unitario: extensión de las funciones seno y coseno para ángulos no agudos</li> <li>b) Ángulos positivos y negativos.</li> <li>c) Ángulo de referencia. Sus cuatro posiciones.</li> <li>d) Medida de ángulos con distintas unidades: grados y radianes.</li> <li>e) Cálculo del seno y el coseno para ángulos mayores de 90°.</li> </ul>

<p>? Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.</p> <p>? Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.</p> <p>? Generaliza el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera.</p> <p>? Expresa las razones trigonométricas como funciones, con los ángulos medidos en radianes.</p> <p>? Identifica en las funciones del tipo</p> $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ <p>la frecuencia, la amplitud, el periodo y ángulo de desfase. Los usará para dibujar directamente la gráfica. De igual manera será capaz de identificar en la gráfica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente.</p>	<p>? Una vez que se ha introducido el círculo unitario, y en él se ha explicado la forma en que pueden calcularse el seno y el coseno para ángulos diversos no agudos, hay que pedirles que ellos lo hagan para algunos círculos con radios diferentes, de modo que vean que el tamaño del radio no afecta el resultado; a la vez, sirve para reforzar el procedimiento.</p> <p>? Analizar el comportamiento del seno, coseno y tangente, cuando el ángulo varía de 0° a 90°; de 90° a 180°; de 180° a 270° y de 270° a 360°. Guiar al alumno para obtener conclusiones sobre signos, repetición de valores, qué sucede cuando <b>x</b> toma los valores 0°, 90°, 180° etcétera.</p> <p>? Es conveniente utilizar la calculadora para hacer más eficientes los cálculos y conversiones.</p> <p>? Para trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, se puede retomar el círculo unitario, trazado en papel milimétrico en la orilla de la hoja, para que en el resto de ella vayan construyendo la gráfica. En clase se puede trabajar con coseno y dejarles que tracen la del seno. Ya con estas dos se procedería a graficar la función tangente y relacionar los ceros del coseno con los rompimientos de la gráfica.</p>	<p>Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente.</p> <p>a) Análisis del dominio y rango.</p> <p>b) Noción de amplitud, periodo y frecuencia.</p> <p>Definición de función periódica:</p> $f(x + k) = f(x).$ <p>Gráfica de las funciones:</p> $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ <p>a) Análisis del comportamiento de sus parámetros <b>a, b, c y d.</b></p> <p>b) Fase y ángulo de desfase.</p> <p>Las funciones trigonométricas, como modelos de fenómenos periódicos. Problemas de aplicación.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>? Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, ondas electromagnéticas, etcétera.</p>	<p>? Se aprovecharían las gráficas de estas tres funciones para estudiar sus características (dominio, rango, simetrías, etcétera.) resaltando la periodicidad y las relaciones entre las tres gráficas.</p> <p>? Solicitarles que expresen con sus propias palabras y luego con símbolos, la condición de variación periódica.</p> <p>? A partir de las gráficas de algunos fenómenos o situaciones que se modelen con seno y coseno, introducir el concepto de amplitud, periodo, diferencia de fase, frecuencia. Dejar que ellos en casa construyan gráficas para distintos valores de estos parámetros.</p> <p>? Con un mismo ejemplo, analizar cómo puede modelarse indistintamente por seno o coseno, y resaltar el hecho de que habiendo identificado que se trata de este tipo de variación periódica, el problema de la modelación se reduce a determinar cuáles deben ser los valores de los parámetros <b>a</b>, <b>b</b>, <b>c</b> y <b>d</b>, en las expresiones:</p> $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ <p>? Se sugiere apoyarse en el uso de software como <i>Excel</i>, <i>Derive</i>, <i>WinPlot</i> y <i>Máxima</i>.</p>	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

## UNIDAD IV. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

### Propósitos:

- ✍ Continuar el estudio de las funciones trascendentes con las funciones exponenciales y logarítmicas, cuya forma peculiar de variación, permite modelar diversas situaciones de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar la identificación de dominio y rango de una función, así como la relación entre parámetros y gráfica,.

**TIEMPO:** 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
<p>El alumno:</p> <p>Respecto a Funciones Exponenciales</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>? Explora en una situación o fenómeno que presente crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza la forma en que varían los valores de la función respectiva.</li> <li>? Reconoce que en este tipo de situaciones, para valores de <math>x</math> igualmente espaciados, son constantes las razones de los valores correspondientes de <math>f(x)</math>,</li> <li>? Identifica que en la regla de correspondencia de las funciones que modelan este tipo de situaciones, la variable ocupa el lugar del exponente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>? Se sugiere iniciar el tema con alguna situación que ilustre la variación exponencial (y la logarítmica en su momento). A través de su exploración, incorporar los conceptos y las formas de representación, de modo que tengan un sentido e interpretación en el contexto de la situación analizada, antes de proceder a un estudio más general y abstracto de este tipo de funciones.</li> <li>? Para ayudar a los alumnos a identificar la característica de la variación exponencial, conviene que al presentarles una serie de datos así relacionados, calculen algunas <b>razones</b> de los valores de <math>f(x)</math> para valores de <math>x</math> "igualmente espaciados"; de modo que puedan observar que se obtiene una constante.</li> </ul>	<p>Funciones Exponenciales</p> <p>Situaciones que involucran crecimiento y decaimiento exponencial.</p> <p>Análisis de la variación exponencial:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Papel que desempeña la variable.</li> <li>b) Crecimiento y decaimiento.</li> <li>c) Representación algebraica.</li> <li>d) Contraste de comportamientos entre funciones exponenciales y funciones potencia.</li> </ol>

<p>? Obtiene, mediante el análisis de las condiciones de una situación o problema o bien del estudio del comportamiento de algunos valores que obtenga, la expresión algebraica <math>f(x) = ca^x</math> que le corresponda.</p> <p>? Explica por qué la base <b>a debe ser mayor que 1</b>, en las funciones del tipo <math>f(x) = a^x</math> y <math>f(x) = (1/a)^x</math>.</p> <p>? Recuerda el significado de un exponente negativo, y lo utilizará para manejar la equivalencia entre <math>f(x) = (1/a)^x</math> y <math>f(x) = a^{-x}</math>.</p> <p>? Proporciona el dominio y el rango de una función exponencial dada.</p> <p>? Traza la gráfica de algunas funciones exponenciales como: <math>2^x</math>, <math>3^x</math>, <math>10^x</math>, <math>e^x</math>. Les aplica las modificaciones pertinentes que produzcan, en la gráfica, traslaciones horizontales y verticales.</p> <p>? Compara el comportamiento entre funciones exponenciales y funciones potencia. (<math>2^x</math> con <math>x^2</math> o con <math>x^3</math> por ejemplo). Obtiene conclusiones al respecto.</p>	<p>? Otro momento de reflexión en la unidad, es acerca del "significado" de un exponente que no es entero, sobre todo cuando tampoco es racional, ¿qué significa <math>3^2</math> o <math>2^{2^x}</math> por ejemplo?</p> <p>? Para presentar y comentar la definición de logaritmo de un número, conviene introducir una pregunta que origine una ecuación en la que el exponente es la incógnita (en un problema relativo a una función exponencial) y que el alumno intente despejarla. Luego, hacer ver que para resolver la ecuación se requiere de un nuevo concepto e incluso una nueva simbolización.</p> <p>? Para el manejo de las propiedades de los logaritmos, no se está pensando en numerosos ejercicios. Dentro de la parte de aplicación, hay situaciones y problemas que les demandarán su uso frecuente.</p> <p>? La relación entre <math>y = a^x</math> y <math>\log_a y = x</math>. ayuda a introducir la noción de función inversa, por lo que es importante que al trazar la grafica de una de ellas a partir de la otra, se analice y explique con cuidado el porqué del dominio de una y otra, o por qué precisamente se reflejan mutuamente en la recta <math>y = x</math> que corresponde a la función identidad.</p>	<p>Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo:</p> $f(x) = ca^x \quad \text{con } a > 1 \text{ y } c > 0$ $f(x) = c(1/a)^x \quad \text{con } a > 1 \text{ y } c > 0$ <p>Revisión del dominio y rango. Papel que desempeña <b>c</b>.</p> <p>Importancia y caracterización del número <math>e</math>.</p> <p>Las propiedades:</p> $a^x a^y = a^{x+y};$ $(a^x)^y = a^{xy}.$ <p>Problemas diversos de aplicación.</p> <p>Funciones Logarítmicas</p> <p>Situaciones que dan lugar a funciones logarítmicas.</p> <p>La función logaritmo como inversa de la función exponencial. Noción de función inversa.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>? Identifica que en <math>f(x) = a^x</math> (con <math>a &gt; 1</math>) un exponente positivo indica crecimiento exponencial, mientras que uno negativo, habla de decaimiento. Interpreta este hecho tanto en la gráfica de la función como en el contexto de la situación dada.</p> <p>? Aplica los conocimientos adquiridos respecto a funciones exponenciales, para modelar algunas situaciones de diversos contextos.</p> <p>Respecto a Funciones Logarítmicas</p> <p>? Explica verbalmente el significado de <math>\log_a x</math>.</p> <p>? Explica el porqué de la equivalencia entre las expresiones <math>y = a^x</math> y <math>\log_a y = x</math>. Transita de una expresión a la otra.</p> <p>? Identifica que para una misma base <math>a</math>, la función exponencial y la función logaritmo respectiva, plantean situaciones inversas una de la otra. (<math>\log_a a^x = x</math> y <math>a^{\log_a x} = x</math>)</p> <p>? Conoce la noción de función inversa y explica en sus propias palabras qué sucede cuando se aplica una después de la otra.</p>	<p>? A partir de lo que han estudiado para otros tipos de funciones, se puede guiar a los alumnos para que establezcan de manera general, las modificaciones requeridas a los parámetros de la función <math>f(x) = ca^x</math> (o <math>f(x) = \log_a x</math>), para que la gráfica se traslade horizontal o verticalmente, se refleje en el eje de las <math>x</math>, se incremente su variación, etcétera.</p> <p>? Es conveniente trabajar con problemas de diversa índole, como pueden ser: interés compuesto, crecimiento de una población, desintegración radiactiva, asimilación de un medicamento, depreciación del precio de un coche, escalas de intensidad de un sonido o de un sismo, etcétera.</p> <p>? Se recomienda el uso de la calculadora para el cálculo de logaritmos y valores de <math>a^x</math> y de algún <i>software</i> de los ya mencionados en otras unidades, para la graficación de estas funciones.</p>	<p>Equivalencia de las expresiones</p> <p><math>y = a^x</math> y <math>\log_a y = x</math>.</p> <p>Logaritmos con base 10 y naturales.</p> <p>Propiedades de los logaritmos incluyendo la expresión para cambio de base.</p> <p>Gráficas de funciones logarítmicas. Su relación con la gráfica de la función exponencial de la misma base. Su dominio y rango.</p> <p>Problemas diversos de aplicación</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>? Representa por medio de funciones logarítmicas, algunas situaciones que se le presenten, y aplica en ellas, cuando se requiera, las propiedades de los logaritmos.</p> <p>? Menciona las ventajas de trabajar con los exponentes para efectuar cálculos y resolver problemas.</p> <p>? Construye la gráfica de algunas funciones logarítmicas, en particular de <b><math>f(x) = \log x</math></b> y de <b><math>f(x) = \ln x</math></b>.</p> <p>? Construye la gráfica de <b><math>f(x) = \log_a x</math></b> (para algún valor de <b>a</b>) a partir de reflejar la gráfica de su inversa, en la recta <b><math>y = x</math></b>.</p> <p>? Reconoce a las funciones exponenciales y logarítmicas como una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.</p> |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|