Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Área Matemáticas

Programa de Estudios de Matemáticas III

PROGRAMA DEL TERCER SEMESTRE DE MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UBICACIÓN DEL CURSO

En el tercer curso se generalizan los procedimientos algebraicos de solución para sistemas de ecuaciones al trabajar ahora con sistemas que incorporan más ecuaciones e incógnitas, o bien que incluyen ecuaciones cuadráticas. Por otra parte, se introduce una nueva representación de los objetos geométricos que permite estudiarlos desde otras perspectivas más propicias para la generalización y, con ello, aumentan también las posibilidades de su tratamiento y aplicación, tanto en matemáticas como en otras ramas del conocimiento. De esta forma se retoman conocimientos que el alumno ya trabajó en los semestres previos para ampliarlos o para darles un nuevo tratamiento.

En el estudio de los sistemas de ecuaciones, se extienden los métodos de suma y resta y el de sustitución para aplicarlos a sistemas con mayor número de ecuaciones e incógnitas, o a sistemas que incluyen ecuaciones cuadráticas. No obstante todas las posibilidades teóricas y prácticas que este tema abre, su tratamiento se reduce a ilustrar formas en que la matemática extiende sus conceptos y procedimientos cuando tiene que enfrentar situaciones de mayor dificultad, generalizando ideas centrales que surgen en los casos más simples. Es importante resaltar que los conocimientos adquiridos con esta temática, apoyarán algebraicamente el estudio de problemas y situaciones que se tratarán en las unidades posteriores.

En cuanto a la geometría analítica, que abarca la mayor parte del curso, su enfoque se centra en hacer énfasis en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos, que desde el punto de vista euclidiano sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos.

Es importante que el alumno perciba cómo a través de la introducción de un sistema de coordenadas y del manejo del método analítico, se obtienen procedimientos generales de construcción y análisis; se facilita la deducción de resultados geométricos (ya que esta tarea queda sujeta a las reglas del álgebra), y se favorece y profundiza el estudio del comportamiento de los lugares geométricos al identificar las características de los parámetros que las definen. Todo ello permite extender el campo de aplicaciones de la geometría euclidiana.

Aunque una parte importante del método analítico estriba en poder obtener la forma algebraica que representa a un lugar geométrico, para estudiarlo desde esta perspectiva, el tratamiento de la temática dista de centrarse en el manejo de un conjunto de fórmulas para cada posición de la recta o de las cónicas que se estudian; más bien, se intenta **manejar estrategias generales** y ubicar la importancia de contar con diversas formas de representación que apoyan la comprensión y facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema.

Actualmente, existe *software* en diversas versiones (*Geolap, Cabri, Derive*, etcétera) que favorece, entre otras, la exploración de las características de las cónicas por parte del alumno, el reconocimiento de patrones de comportamiento, la formulación de conjeturas, el establecimiento de relaciones entre la gráfica de una cónica y los parámetros de la ecuación asociada; por lo que es recomendable su uso para enriquecer el estudio de la Geometría Analítica.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el tercer curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir estrategias generales, tanto en la solución de los sistemas de ecuaciones, como en el análisis de la representación algebraica y gráfica de los objetos geométricos.
- Reconoce que se incrementan las posibilidades de análisis y aplicación de la Geometría Euclidiana, al incorporar al estudio de los objetos y relaciones geométricas la representación y los procedimientos del álgebra.
- Percibe a los sistemas de coordenadas como la noción fundamental para realizar el estudio analítico de los lugares geométricos.

- ✍ Identifica a partir del enunciado de un problema, la estrategia que le permita obtener los parámetros esenciales de un lugar geométrico, o bien, vislumbra un procedimiento alterno para obtener la ecuación que lo representa.
- ✍ Conoce las propiedades de los lugares geométricos estudiados en el curso, y obtiene la ecuación que los representa.
- ✍ Dada una ecuación con dos variables, lineal o cuadrática, identifica de qué tipo de “curva” se trata y obtiene información sobre sus elementos.
- ✍ Avanza en el concepto de sistema de ecuaciones y su resolución, al incorporar ecuaciones cuadráticas o un mayor número de ecuaciones e incógnitas.
- ✍ Resuelve problemas de aplicación utilizando los conocimientos adquiridos en las diversas unidades del curso.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	**Nombre de la Unidad**	**Horas**
I	Solución de Sistemas de Ecuaciones.	15
II	Sistemas de Coordenadas y Lugares Geométricos.	15
III	La Recta y su Ecuación Cartesiana.	15
IV	La Elipse, la Circunferencia y sus Ecuaciones Cartesianas.	20
V	La Parábola y su Ecuación Cartesiana.	15

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Caballero, Arquímedes, *et al*. *Geometría analítica,* Esfinge, México, 2000.

Filloy, Eugenio y Hitt, Fernando. *Geometría Analítica*, Iberoamérica, México, 1997.

Fuenlabrada, Samuel. *Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, México, 2000.

Fuller, Gordon y Tarwater, Dalton. *Geometría Analítica*, Addison-Wesley, México, 1999.

Holliday, Berchie et al. *Geometría Analítica con Trigonometría*, McGraw-Hill, México, 2002.

Leithold, Louis. *Álgebra y Trigonometría: con Geometría Analítica,* Harla, México, 1994.

Leithold, Louis. *Cálculo con Geometría Analítica*, Harla, México, 1992.

Swokowski, Earl. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002.

Torres, Carlos. *Geometría Analítica,* Santillana, México, 1998.

MATEMÁTICAS III. UNIDAD I. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Propósitos:

- Ampliar el concepto de Sistema de Ecuaciones y extender de los procedimientos algebraicos de solución. Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema. Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico. Avanzar en la práctica de la operatividad algebraica.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas. ? Recuerda el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y comprende la forma en que se extiende a un sistema 3x3. ? Reafirma el concepto de sistemas equivalentes y entenderá que en los métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones, se recurre a transformarlos a sistemas equivalentes de mayor simplicidad, hasta llegar a alguno que contiene una ecuación con una sola incógnita. Con ello, reafirma la estrategia matemática de convertir una situación desconocida o difícil, a otra conocida o más simple.	? Se sugiere plantear y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos contemplados en la temática de la unidad, en diferentes momentos de avance de la misma. ? Es conveniente retomar los sistemas de ecuaciones 2x2 para reafirmar los diversos casos que se presentan en torno al número de soluciones, así como los métodos de solución. Una vez reafirmado esto, se puede pasar a analizar el caso de sistemas 3x3. ? Se sugiere graficar los sistemas lineales 2x2, utilizando los parámetros de una función lineal, o bien las intersecciones con los ejes, para retomar conocimientos ya vistos. A partir de las gráficas, recordar que un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas puede: a) Tener solución única. b) Tener infinidad de soluciones. c) No tener soluciones.	Situaciones que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3: a) Con solución única. b) Con infinidad de soluciones. c) Sin soluciones. Sistemas de ecuaciones equivalentes. a) Concepto. b) Forma triangular. Métodos de reducción y de sustitución. Sistemas de ecuaciones no lineales 2x2: a) Con una ecuación lineal y otra cuadrática.

? Distingue cuando un sistema de ecuaciones 3x3 o 4x4, está escrito en forma triangular y explica qué ventajas aporta esta forma para resolverlo. ? Dado un sistema de ecuaciones lineales 3x3, utiliza el método de suma y resta para transformarlo a la forma triangular, y a partir de ahí, obtiene su solución. ? A través de la última ecuación de un sistema de ecuaciones escrito en forma triangular, identifica si éste es compatible o no, o bien, si es dependiente o no. ? En el caso de sistemas 2x2, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explica a partir de una gráfica, qué significa que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones. ? Para sistemas de ecuaciones 2x2 con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), traza un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las graficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.	? Relacionar cada uno de estos casos, cuando llegue el momento, con la configuración triangular del sistema obtenido por el método de suma y resta. ? En el caso del análisis gráfico de sistemas lineales 3x3, por tratarse de planos en el espacio, la interpretación gráfica tiene mayor dificultad. Por lo que dependiendo del grupo, conviene valorar qué tan conveniente es abordarlo y hasta dónde. Quizá se les puede dejar una actividad a los alumnos para que con cartones o tablas, visualicen las diversas situaciones en que pueden colocarse “tres planos” en el espacio, y de ahí explorar y predecir qué tipos de casos se presentan. ? En cuanto a los métodos de solución, sólo se están contemplando el de reducción (suma y resta) y el de sustitución. El primero permite obtener sistemas triangulares equivalentes y puede generalizarse a sistemas de orden mayor. El segundo es fácilmente transferible a los sistemas que contienen ecuaciones no lineales, y en muchos de estos casos es el método más apropiado. ? Para los sistemas no lineales, se sugiere que las ecuaciones cuadráticas correspondan a parábolas con eje sobre el eje Y, y circunferencias con centro sobre uno de los ejes, de modo que se	b) Con ambas ecuaciones cuadráticas. c) El significado gráfico de su solución. d) Método de sustitución. Problemas de aplicación.

? Aplica el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones en los que una de ellas o ambas son cuadráticas. ? Aprecia que el álgebra es útil para obtener información acerca del comportamiento de algunos objetos matemáticos, como es el caso de saber si dos gráficas se intersectan o no, cuántas veces y en dónde. ? Resuelve problemas que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos estudiados en esta unidad, e interpreta el sentido de la solución hallada.	simplifiquen las dificultades algebraicas y gráficas para obtener o visualizar su solución; permitiendo con ello centrarse en las ideas sin distractores operativos. En las unidades de geometría analítica podrán trabajar con curvas de ecuaciones un poco más complejas. ? En cuanto a las diversas situaciones en las que pueden combinarse dos circunferencias y parábolas, podemos dejarlos que exploren, fijando un número de intersecciones determinado, y pidiéndoles que averigüen y argumenten si eso es posible o no.	

UNIDAD II. SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Propósitos:

- Mostrar una visión global del método de la Geometría Analítica como el medio para resolver problemas de corte euclidiano reduciéndolos a problemas algebraicos. Proporcionar los elementos que servirán en unidades posteriores para emplear el método en situaciones más complejas.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce que un aspecto relevante en el método de la Geometría Analítica, consiste en definir un sistema de referencia en un plano. ? Encuentra las coordenadas de un punto en el plano utilizando los sistemas de referencia polar y cartesiano. ? Localiza puntos en el plano cuando se proporcionen sus coordenadas polares o rectangulares. ? Representa de manera correcta, en cualquier cuadrante del Plano Cartesiano, un conjunto cualesquiera de puntos.	? Conviene antes de entrar al estudio de esta temática que el profesor exponga, a grandes rasgos, la intención de Descartes al generar el método de la Geometría Analítica. ? Para introducir lo que es un sistema de coordenadas y destacar su importancia, se pueden plantear problemas que hagan ver la necesidad de contar con la información necesaria y suficiente para localizar un punto en un plano, hasta llegar a la conclusión de que es necesario definir un sistema de referencia, en base al cual el punto queda localizado por dos valores llamados coordenadas. Se puede, por ejemplo, localizar un objeto sobre el plano de una casa, o bien ubicarlo teniendo como referencia un punto (por ejemplo un árbol), y una longitud. Esto induce el uso de los dos sistemas de coordenadas.	Estudio analítico de un punto en el plano. a) Representación numérica de un punto en el plano: - En el sistema de coordenadas polares. - En el sistema de coordenadas rectangulares. Estudio analítico de un segmento rectilíneo en el plano cartesiano. a) Localización de un segmento rectilíneo en el plano. Condiciones necesarias y suficientes.

? Identifica las condiciones para representar un segmento rectilíneo en el plano cartesiano: las coordenadas de sus puntos extremos, o bien, las coordenadas de uno de ellos, la longitud del segmento y su ángulo de inclinación. ? Entiende los pasos de la deducción, de la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. ? Calcula la longitud de un segmento dadas las coordenadas de sus puntos extremos. ? Dadas las coordenadas de los puntos extremos de un segmento, calcula su ángulo de inclinación a través de su pendiente. ? Resuelve analíticamente problemas que impliquen determinar un segmento a partir de algunas de las propiedades que lo definen. ? Explica qué significa que un punto divida a un segmento rectilíneo en una razón dada. ? Dadas las coordenadas de los extremos de un segmento y las de un punto interior a él, calcula la razón en que éste último divide al segmento.	? Es recomendable iniciar el trabajo con el primer cuadrante y posteriormente, localizar un punto en el plano usando todos los cuadrantes, incluyendo puntos que están sobre los ejes de coordenadas. ? En relación al estudio analítico de un segmento, se puede plantear una secuencia de problemas que consideren: ✍ La necesidad de encontrar la mínima trayectoria entre dos puntos. ✍ La importancia de determinar la información necesaria y suficiente para localizar un segmento rectilíneo en el plano. ✍ Combinando estos dos aspectos, se puede proponer un problema que implique calcular la longitud del segmento, de modo que su contexto induzca a usar el teorema de Pitágoras, y con ello, obtener la fórmula de distancia entre dos puntos. ✍ Plantear problemas, cuya solución requiera calcular su ángulo de inclinación. ✍ Después de varios ejemplos concretos, se puede generalizar el procedimiento para trabajar en un contexto abstracto. ✍ En cuanto a la razón en que un punto dado divide al segmento, y su recíproco, si no se plantea un problema que le dé contexto, es importante inducir el caso general a través de estudiar la situación con segmentos paralelos a los ejes, e invitar al alumno	b) Longitud del segmento. Distancia entre dos puntos. c) Ángulo de inclinación del segmento. Concepto de pendiente. d) Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos. e) Coordenadas del punto que divide al segmento en una razón dada. Estudio analítico de algunos lugares geométricos en el plano cartesiano. a) Lugares geométricos sencillos que dan lugar a rectas y circunferencias y parábolas. -Su representación algebraica. -Intersecciones entre ellos o con los ejes cartesianos.

? Encuentra las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada. En particular, las coordenadas del punto medio. ? Dadas las coordenadas del punto medio y de uno de los extremos de un segmento rectilíneo, encuentra las coordenadas del otro extremo. ? Reconoce a una ecuación con dos variables, como la expresión general que satisfacen las coordenadas de los puntos de una “curva” en el plano. ? Resuelve problemas geométricos de intersección entre rectas, circun-ferencias o entre éstas y los ejes coordenados. ? Reduce algunas situaciones a otras más simples que ya sabe resolver, lo que reforzará esta estrategia de resolución de problemas. ? Incrementa su capacidad de generalizar, tanto al obtener fórmulas generales a partir de analizar casos concretos, como al interpretar un concepto en dos representaciones distintas. ? Identifica algunos de los procesos inversos que se presentan en esta unidad; lo que refuerza su capacidad de inversión de pensamiento.	a usar esto para obtener el caso general. ? En cuanto a lugares geométricos, se puede pedir a los alumnos que dibujen los puntos cuyas coordenadas satisfagan una condición verbal que dé lugar a rectas o circunferencias, someter a discusión las soluciones y pedir que simbolicen algebraicamente dicha condición. ? También ayuda someter a discusión grupal el tipo de información que le darían a una persona ausente para que pueda reproducir una recta o curva específica trazada en el plano cartesiano. ? Solicitar que escriban con sus propias palabras la información pertinente, y luego que la expresen algebraicamente. ? Ejercitar con varios ejemplos y solicitar que decidan (en forma no gráfica) si un punto cuyas coordenadas se dan pertenece o no a algunas de las curvas trabajadas. Plantear por último, el aspecto de encontrar la intersección con los ejes y entre curvas.	

UNIDAD III. LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos:

- ✍ Reafirmar el conocimiento del método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de la recta y avanzar en la solución analítica de problemas que involucran relaciones entre figuras rectilíneas estudiadas en Geometría Euclidiana.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Dada una ecuación lineal con dos variables, la identifica como una recta y viceversa. ? Encuentra la ecuación de una recta, dados distintos elementos que la definen. ? Reconoce las distintas formas de representación algebraica de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar, dependiendo de las condiciones que se proporcionen. ? A partir de la ecuación de una recta, en cualesquiera de sus formas, encuentra los elementos que definen su posición y traza su gráfica.	? Se puede iniciar con una discusión sobre la información completa que se requiere para determinar la posición de una recta en el plano, y orientar la discusión para que se logren obtener las dos alternativas. ? Para que los alumnos exploren la condición que deben satisfacer los puntos que están sobre una recta, proponer ternas de puntos y pedirles que analicen si los tres se encuentran alineados o no. Se pueden elaborar bosquejos en el pizarrón de cómo quedaría la trayectoria del trío de puntos en ambas posibilidades. Posteriormente, "jugar" con el tercer punto de modo que su localización salga del espacio disponible. Con una orientación a través de preguntas y sugerencias pueden llegar a formular verbalmente la condición que conocemos sobre la igualdad de las pendientes.	La Recta ubicada en el Plano Cartesiano. a) Condiciones necesarias y suficientes para localizar una recta. La Ecuación Cartesiana de la Recta, cuando se conocen: a) Las coordenadas de dos de sus puntos. b) Su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. c) La ordenada al origen y su pendiente. d) Cuándo es paralela a uno de los ejes de coordenadas.

? Dadas la ecuación de una recta y las coordenadas de un punto, decide, sin recurrir a la gráfica, si éste pertenece o no a la recta.

? Dadas las ecuaciones de dos rectas, o bien, los elementos que definen sus posiciones, determina si se cortan o no y, en su caso, el ángulo de intersección y las coordenadas del punto donde se cortan.

? Expresa los argumentos que justifican las condiciones analíticas para el paralelismo o para la perpendicularidad de dos rectas.

? A partir de las ecuaciones de dos rectas, decide si son paralelas, perpendiculares o simplemente secantes.

? Comprueba algunas relaciones geométricas que involucran rectas, estudiadas en Geometría Euclidiana.

? Reconoce las relaciones presentes en una situación geométrica.

? Refuerza su capacidad para pasar de lo particular a lo general y viceversa.

? A partir de esto, se puede hacer que varíe el tercer punto pero siempre sujeto a la condición hallada, de modo que el paso a representarlo por (x, y) sea más natural. De aquí ya es fácil obtener la ecuación

$$y ? y_1 ? \frac{y_2 ? y_1}{x_2 ? x_1}(x ? x_1)$$

y con base a ella las demás formas.

? Es conveniente enfatizar que las coordenadas de un punto perteneciente a una recta son soluciones de la ecuación lineal que la representa; esto ayudará a que el alumno pueda trabajar por sí solo los diversos problemas que se le presenten.

? Aunque se desea favorecer la independencia del alumno respecto al profesor en el proceso de su aprendizaje, en el caso del ángulo comprendido entre dos rectas que se cortan, se propone que el alumno únicamente obtenga la expresión para el ángulo en términos de los ángulos de inclinación de ambas rectas, ayudado del bosquejo gráfico, y que la deducción de la fórmula donde aparecen las pendientes la lleve a cabo el profesor, ya que reviste complicaciones algebraicas.

? La condición analítica de perpendicularidad, también es conveniente que la obtenga el profesor por las dificultades conceptuales inherentes.

Tratamiento analítico para determinar a partir de la ecuación de una o dos rectas:

a) Los elementos geométricos que la definen: ángulo de inclinación y uno de sus puntos, o dos de sus puntos.
b) Si un punto cuyas coordenadas se conocen, pertenece o no a una recta.
c) La intersección de dos rectas que se cortan.
d) El ángulo entre dos rectas que se cortan.
e) La condición de perpendicularidad o paralelismo de dos rectas.

Solución analítica de problemas de corte euclidiano.

a) Cálculo del área de un triángulo.
b) Comprobación en casos concretos de:
   ✍ La concurrencia de las mediatrices de un triángulo.
   ✍ La razón de 1: 2 en que el punto de intersección de las medianas de un

? Avanza en su desempeño respecto al método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de la recta y resolver problemas que la involucran. ? Valora al Álgebra, no sólo como una herramienta para obtener resultados numéricos, sino también para establecer relaciones que proporcionan información acerca de la problemática que se estudia, esto a través de: ✍ Obtener, a partir de una de sus representaciones, las otras formas de la ecuación de la recta. ✍ Calcular los elementos que definen una recta a partir de su ecuación dada en la forma general.	? Para el último punto de la temática, el profesor puede guiar el análisis de lo que pide la situación con intervenciones como: quiero demostrar que estos elementos satisfacen lo dicho, luego, ¿se pueden representar algebraicamente?, ¿lo que deben satisfacer, tiene su contraparte con lo que deben cumplir las ecuaciones?, ¿con los elementos dados puedo representar lo que se pide, o requiero obtener primero otros datos? ? Es conveniente desde esta unidad que el alumno empiece, paulatinamente, a identificar con claridad **qué necesita** para obtener la expresión analítica del lugar geométrico que se pide y luego, plantee una serie de pasos de **cómo puede obtenerlo,** de modo que **vaya conformando una estrategia** de acción que lo ayude a entender la mecánica de los problemas y a no depender del profesor para saber qué camino seguir. ? Para comprobar la concurrencia de las mediatrices, etcétera se propone trabajar con un triángulo de coordenadas dadas y no en el caso general.	triángulo divide a cada una de ellas. ✍ La igualdad de los ángulos en un triángulo isósceles. ✍ La igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.

UNIDAD IV. ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Propósitos

- Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y la circunferencia y avanzar en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: Respecto al estudio de la Elipse ? Realiza al menos una construcción de la elipse, y en función de ello: - Identifica los elementos que la definen. - Reconoce los tipos de simetría de esta curva. - Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico. - Deduce la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico. ? A partir de la expresión anterior, comprende cómo se obtiene la ecuación ordinaria (fuera del origen) de la elipse.	? Para motivar el interés y curiosidad de los alumnos, se les puede pedir que asistan al Museo de *Universum*, ubiquen ahí elipses y circunferencias, investiguen en dónde están presentes y algunas de sus características. Otros tópicos para investigar son los propósitos y características de la bóvedas de ciertos templos coloniales, o bien qué lugar ocupa el sol en las órbitas planetarias, etcétera. ? También se les puede involucrar en realizar los cortes del cono ya sea con conos de plastilina, unicel o "vasos" cónicos de papel, de modo que vean cómo de acuerdo al tipo de corte, se obtiene una u otra cónica. Esto también puede aprovecharse para hacer ver a la circunferencia como un caso límite de la elipse. ? Se recomienda usar el método del jardinero para trazar la elipse, ya que éste permite visualizar las propiedades de sus puntos, y llegar así a su definición como lugar geométrico. También se sugiere apoyarse en la expresión:	Estudio de la Elipse La elipse como lugar geométrico. a) Trazo de la elipse y sus propiedades de simetría. b) Definición geométrica de la elipse. c) Elementos que definen a la elipse: distancia focal, eje mayor y eje menor. Relación entre ellos. Ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas: a) Ecuación ordinaria con centro fuera del origen. b) Ecuación ordinaria con centro en el origen. c) Ecuación general.

? Utilizando la ecuación ordinaria de la elipse, obtiene las otras formas. ? Transita de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa. Para ello, aplica el método de completar cuadrados. ? Determina los elementos esenciales de una elipse, a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica. ? Concatena con coherencia sus argumentos y deducciones en el proceso para obtener la definición, la ecuación y la gráfica de una elipse. ? Aplica los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas. Con relación a la circunferencia ? Reconoce a la circunferencia como el lugar geométrico de mayor frecuencia en su entorno. ? Obtiene el lugar geométrico de la circunferencia como caso límite de la elipse.	**$d(P, F_1) + d(P, F_2) = C$** como un paso intermedio, que facilitará obtener la ecuación de la elipse. ? A partir de esta expresión el profesor puede conducir la deducción de la ecuación ordinaria con centro fuera del origen y eje mayor paralelo a alguno de los ejes de coordenadas. ? En la misma actividad del método del jardinero, pedirles que alejen y acerquen los focos, observen qué sucede y obtengan conclusiones al respecto. ? Utilizar el teorema de Pitágoras para establecer la relación entre **a, b** y **c**. ? Cada vez que obtengan la ecuación ordinaria, es bueno pedirles que tracen un boceto de su gráfica a partir del reconocimiento de sus elementos, de modo que valoren las ventajas que esto representa. Luego cuando ya estén trabajando con la fórmula general y se desee transformarla a la ordinaria, se les puede pedir que obtengan la gráfica y dejarlos que exploren dificultades y comparen lo que hacían cuando tenían la forma ordinaria. A partir de allí, tendrá sentido el aprender cómo llevar a cabo el camino de regreso de la general a la ordinaria, ya que éste, como sabemos, es más complicado. ? Para introducir la circunferencia como caso límite de la elipse, hay que aprovechar y retomar las observaciones que los alumnos obtuvieron cuando construyeron la elipse por el método del jardinero (cuando los dos focos coinciden) y con los cortes del cono (cuando el corte llega a ser paralelo a la	Aplicaciones: a) La tangente a la elipse en un punto que pertenece a ésta b) Intersecciones de rectas con la elipse. c) Resolución de problemas diversos. Estudio de la Circunferencia La circunferencia como lugar geométrico: a) Definición geométrica de la circunferencia. b) Elementos que definen a la circunferencia. Ecuación de la circunferencia. a) Ecuación ordinaria, con centro fuera del origen. b) Ecuación ordinaria con centro en el origen. c) Ecuación general.

? Identifica los elementos que determinan una circunferencia. ? Obtiene la definición de circunferencia como lugar geométrico. ? Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen, a partir de la ecuación ordinaria de la elipse. ? Transita de la forma ordinaria a la forma general y viceversa, para ello, utiliza el método de completar cuadrados que ya conoce. ? Determina el centro y el radio de una circunferencia, a partir de su ecuación, dada tanto en la forma general como ordinaria y los utiliza para construir la gráfica. ? Ante una ecuación ordinaria de una elipse identificará si se trata del caso límite cuando se obtiene una circunferencia; en caso contrario, indica a cuál de los ejes de coordenadas es paralelo su eje mayor. ? Aplica los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas.	base del cono). Incluso se puede trazar la circunferencia con el método del jardinero. ? Se puede plantear el reto al alumno de obtener la ecuación de la circunferencia a partir de la ecuación ordinaria de la elipse. ? Por otra parte, podemos pedirles que expresen verbalmente la propiedad de los puntos que están sobre una circunferencia y que comparen si lo que establece la ecuación ordinaria obtenida a partir de la elipse coincide con dicha propiedad. ? Es conveniente hacer ver al alumno la importancia de estos lugares geométricos por las aplicaciones que tienen.	Aplicaciones: a) La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos. b) Ecuación de la recta tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos. c) Intersecciones de rectas con una circunferencia. d) Resolución de problemas de diferente índole.

UNIDAD V. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos:

- Consolidar el manejo del método analítico a través del estudio de la ecuación de la parábola. Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren tanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Realiza al menos una construcción de la parábola, y en función de ello: - Identifica los elementos que la definen. - Reconoce la simetría de esta curva. - Enuncia la definición de parábola como lugar geométrico. - Expresa, como paso intermedio, la característica que define a los puntos de la parábola, por medio de la expresión: **d(P, F) = d(P, L)** - Deduce la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico.	? Para motivar el interés y curiosidad de los alumnos, se les puede pedir que asistan al Museo de Universum y ubiquen ahí parábolas, e investiguen en dónde están presentes y algunas de sus propiedades. O bien, que obtengan información sobre alguno de los siguientes tópicos: las características de los faros de los coches, las antenas parabólicas, los grandes proyectores de luz que se utilizan en las inauguraciones, las trayectorias de móviles en un campo gravitacional constante, etcétera. ? También se puede trabajar con el corte del cono que proporciona esta cónica. Dado que ya lo hicieron para la elipse y la circunferencia, se les puede invitar a que exploren y conjeturen qué tipo de corte hay que hacer en esta ocasión y traten de argumentar por qué antes de verificar haciendo el corte supuesto. Una vez obtenido, es deseable que además lo contrasten con los de las otras cónicas.	La parábola como lugar geométrico a) Trazo de la parábola y sus propiedades. b) Definición geométrica de la parábola. c) Elementos que definen a la parábola: foco, directriz, eje de simetría, lado recto. Relación entre ellos. d) Definición de parábola como lugar geométrico. Ecuación de la parábola con eje paralelo a alguno de los ejes de coordenadas: a) Ecuación ordinaria con vértice en el origen.

? A partir de la expresión anterior, deduce la ecuación ordinaria (con vértice fuera del origen) de la parábola. ? Distingue, de acuerdo a las condiciones dadas (coordenadas del foco, ecuación de la directriz u otros) cuándo es parábola horizontal o vertical, y hacia dónde se abre. ? Relaciona lo que estudió para funciones cuadráticas respecto al papel de los parámetros dentro del comportamiento de la gráfica de la parábola vertical. ? Utiliza esto último para analizar la relación entre los parámetros y la gráfica de las parábolas horizontales. ? Infiere que para transitar de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria, requiere, como en el caso de la elipse y la circunferencia, aplicar el método de completar cuadrados que ya conoce. Se ejercitará al respecto. ? Valora ventajas y desventajas de cada una de las formas, ordinaria o general, en la graficación y análisis de esta curva.	? Se recomienda usar alguno de los métodos (con doblado de papel, con circunferencias concéntricas cuyos radios van aumentando proporcionalmente y se construyen tangentes a ellas, con escuadras y un hilo, etcétera.) para el trazo de la parábola sin proporcionar la definición, sino una serie de indicaciones. Después de que los alumnos hayan unido los puntos y vean qué curva les salió, reflexionen sobre el procedimiento seguido para que así obtengan la condición que satisfacen los puntos de la parábola. ? Antes de enfrentar al alumno a la deducción de la forma ordinaria, es conveniente que se le pida calcular la distancia de cualquier punto a los ejes de coordenadas, y la distancia entre dos puntos que están sobre una recta paralela a los ejes. ? Para favorecer la formación de significados, también se sugiere utilizar la expresión: **d(P, F) = d(P, L)** como un paso intermedio para obtener la ecuación de la parábola, a partir de la condición que la caracteriza expresada en forma verbal. ? A partir de esta expresión el profesor puede conducir la deducción de la ecuación ordinaria con vértice fuera del origen. ? Para reforzar la definición, los alumnos pueden medir con regla o con compás las distancias involucradas y corroborar que son iguales.	b) Ecuación ordinaria con vértice fuera del origen. c) Ecuación general. Aplicaciones: a) Problemas de corte geométrico b) Problemas diversos, que surgen de las características de esta curva.

? Determina los elementos esenciales de una parábola a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica. ? Concatena sus argumentos y deducciones en el proceso de obtener la definición, la ecuación y la gráfica de una parábola. ? Aplica los conocimientos adquiridos sobre esta curva, en la resolución de algunos problemas.	? Si el grupo y el tiempo se prestan a ello, se puede trabajar con las tangentes a la parábola y sus aplicación a problemas concretos. En las diversas unidades de este semestre, es conveniente, de ser posible, apoyarse en algún software (como *Geolap, Cabri, Derive*) para que el alumno identifique características, establezca relaciones entre gráficas y parámetros, reconozca regularidades, etcétera.	