Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Área Matemáticas

Programas de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral II

PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

UBICACIÓN DEL CURSO

En el segundo curso de Cálculo Diferencial e Integral, al incorporar el estudio de la integral y culminar su relación con la derivada a través del Teorema Fundamental del cálculo, se completa el panorama de lo que estudia esta importante rama de la matemática. La orientación del curso, al igual que el anterior, se centra en propiciar el significado de los conceptos a través del manejo de sus diversas representaciones (tabular, gráfica y algebraica), en lograr el desempeño algorítmico a partir de la comprensión de los procedimientos y el uso adecuado de las fórmulas, y finalmente, en utilizar los conocimientos del Cálculo para obtener e interpretar información sobre situaciones de variación que pueden modelarse con una función real de variable real.

En la primera unidad se extiende el estudio de la derivada a un nuevo tipo de funciones, las trascendentes, al analizar ahora la variación y la rapidez de cambio de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas que modelan diversos fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales, entre otros. Se retoma en análisis gráfico sobre las relaciones de una función y sus dos primeras derivadas, para propiciar una mejor comprensión.

El estudio de la integral se inicia propiamente en la segunda unidad de Cálculo II[2], cuando se trabaja el proceso inverso a la derivación con problemas que plantean obtener la función que los modela a partir de conocer su rapidez de cambio. Las funciones polinomiales nuevamente son el punto de partida, ya que facilitan tanto gráfica como algebraicamente, la comprensión de los conceptos de integral, antiderivada y condición inicial, estrechamente vinculada con la existencia de una familia de funciones y con la constante de integración. Se prepara a alumno en cuanto al manejo algorítmico para resolver una diversidad de ejercicios de integración a través de las formas inmediatas y concluir con los métodos de sustitución e integración por partes.

[2] Aunque en Cálculo I no hay una unidad destinada al estudio de la integral, en las dos últimas unidades, se sientan las bases para la comprensión de este importante concepto al estudiar las relaciones de una función con su derivada y utilizar la información que proporciona ésta para conocer aspectos del comportamiento de la función dada.

En la unidad tres, la integral definida se introduce por medio de la función-área asociada a diversas situaciones que se modelan con funciones constantes y lineales, con la intención de darle una presentación más natural que favorezca su significado y su relación con la antiderivada. Este tratamiento ayuda a comprender lo que establece el Teorema Fundamental del Cálculo y su aplicación en el cálculo del área bajo otro tipo de curvas. La unidad termina, con un nuevo camino para calcular el área a través de aproximaciones numéricas, cuando no es posible o no es sencillo encontrar una antiderivada; camino que retoma la noción de proceso infinito y constituye los cimientos de la integral de Riemann.

Por último, la cuarta unidad representa la culminación de ambos cursos. Consolida la comprensión, manejo y aplicación, tanto de la derivada como de la integral en la construcción del modelo asociado a diversas situaciones, en las que la derivada de una función es proporcional a ésta, como son: crecimiento de una población, desintegración radiactiva, Ley de enfriamiento de Newton, asimilación de un medicamento en el organismo, propagación de una enfermedad.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el segundo curso de Cálculo Diferencial e Integral, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas y herramientas que proporciona el cálculo; en particular, la representación y predicción de situaciones y fenómenos que involucran variación.
- ✍ Avanza en la comprensión y manejo de la derivada, al estudiarla en funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- ✍ Comprende la relación entre la derivada y la integral que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo.
- ✍ Utiliza adecuadamente las fórmulas de integración, así como los métodos de sustitución e integración por partes.
- ✍ Relaciona a la integral definida de una función con el área bajo una curva y comprende que puede obtenerse mediante la antiderivada o con un proceso infinito de aproximaciones numéricas.
- ✍ Integra las diversas interpretaciones de la integral y las utiliza para resolver problemas relacionados con la rapidez de cambio y con el cálculo del área bajo una curva.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	Nombre de la Unidad	Horas
I	Derivadas de Funciones Trascendentes.	16
II	La Integral como Antiderivada	16
III	La Integral Definida	20
IV	Modelos y Predicción.	12

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA.

Bittinger, Marvin. *Cálculo para Ciencias Económico- administrativas*. Séptima edición, Addison Wesley, Colombia, 2002.

Goldstein, L. J. *et. al. Cálculo y sus aplicaciones*. Prince - Hall Hispanoamericana, México, 1987.

Hughes, Deborah *et. al. Cálculo aplicado*, CECSA, México, 2002.

Salinas, Patricia, *et. al*. *Elementos del Cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

Stewart, James, *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*, Thomson – Learning, Cuarta Edición, 2001.

Stein, Sherman y BARCELLOS, A. *Cálculo y Geometría Analítica 1*, McGraw – Hill, Colombia, 1995.

Warner, Stefan y COSTENOBLE, Steven. *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición, Thomson, México, 2002.

LECTURAS EDUCATIVAS.

Cantoral, Ricardo. *Matemática Educativa*. *Un Estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

EVALUACIÓN

En estos programas no se incluyen aspectos relativos a la evaluación porque la comisión que los elaboró consideró que el problema de la evaluación en las asignaturas de Matemáticas requiere de una mayor reflexión y tiempo del que se dispuso para revisar y ajustar los programas, de modo que se pudieran plantear sugerencias que realmente incidan en esta problemática.

UNIDAD I. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Propósitos*:*

- Reforzar y extender el conocimiento de la derivada a través del estudio de la variación de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales para cubrir situaciones que se modelan con funciones trascendentes. Retomar las relaciones entre las gráficas de una función y su derivada.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Analiza las gráficas de las funciones seno y coseno y a partir de ellas, bosqueja la gráfica de su respectiva derivada. ? Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones seno y coseno. ? Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas también involucran variación periódica. ? Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.	? Es conveniente iniciar el tema presentando problemas que involucren el uso de la variación de funciones periódicas. ? Conviene utilizar los modelos gráficos para obtener o relacionar la derivada del seno con la función coseno y la relación recíproca respectiva. ? Se propone el análisis tabular de los límites $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, en la obtención de la derivada de las funciones trigonométricas seno y coseno, para reforzar el análisis gráfico. ? Se sugiere obtener las derivadas de las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, a partir de las derivadas de las funciones seno y coseno, las reglas de derivación e identidades trigonométricas. ? Proponer ejercicios de cálculo de derivadas de funciones trigonométricas cuyo argumento sea a su vez, una función algebraica de x.	**Derivadas de funciones trigonométricas** Situaciones que dan lugar a funciones trigonométricas y al estudio de su variación. Construcción gráfica y tabular de la derivada de las funciones seno y coseno. Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Regla de la cadena para funciones trigonométricas cuyo argumento es función de x.

? Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas cuyo argumento es función de x. ? Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas diversos. ? Analiza las gráficas de las funciones logarítmica y exponencial y a partir de ellas bosqueja las gráficas de sus derivadas. ? Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones logarítmica y exponencial. ? Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones logarítmica y exponencial cuyo argumento es función de x. ? Aplica las derivadas de funciones logarítmica y exponencial a problemas diversos.	? Se sugiere emplear la derivada de las funciones circulares para el estudio de fenómenos periódicos, tales como el péndulo simple, pistón oscilante dentro de la Física, o bien, de diversos fenómenos periódicos como son, el ritmo cardiaco, duración de la luz solar diaria, el movimiento de las mareas, el ciclo de la respiración. ? Es útil, mostrar ejemplos y problemas que involucren el crecimiento exponencial y su variación, para iniciar el estudio de su derivada. ? Se propone revisar el comportamiento gráfico, tabular y simbólico de las funciones logarítmica y exponencial para el análisis y obtención de sus derivadas. ? Se sugiere emplear la derivada de la función exponencial como modelo de situaciones de crecimiento, decrecimiento, así como de problemas de interés compuesto. ? Proponer, graduando la dificultad, ejercicios diversos de cálculo de derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales, cuyo argumento sea a su vez función de x. Es conveniente enfatizar las aplicaciones a diversas disciplinas más que los desarrollos teóricos extensos. ? Se sugiere dar a conocer y aplicar el método de la derivación logarítmica. Resaltar el hecho de que al aplicar primeramente el logaritmo en ejercicios de derivadas de productos, cocientes, potencias y exponenciales, y posteriormente derivar, esto se reduce a aplicar las reglas de la derivación de la suma, resta y el producto por un número real.	Aplicaciones de las derivadas de funciones trigonométricas. **Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas**. Situaciones que den lugar a funciones logarítmicas o exponenciales y su variación. Construcción gráfica y tabular de las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica. Derivada de las funciones: e^x, e^u, a^x *y* a^u Derivada de las funciones: $\ln x, \ln u, \log_a x$, *y*. $\log_a u$ Aplicaciones de las derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales.

UNIDAD II. LA INTEGRAL COMO ANTIDERIVADA.

Propósitos:

- ✍ Introducir el concepto de integral indefinida, a partir de analizar situaciones de variación en las que sólo se conoce su razón de cambio e inducir las primeras fórmulas para aplicarlas junto con los dos métodos de integración.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora a través de tablas, gráficas o análisis del comportamiento de la variación, situaciones o problemas cuya solución lleva a encontrar la antiderivada de una función constante o lineal. ? Establece la relación funcional que permite resolver el problema. ? Encuentra la función cuya derivada es de la forma $f'(x) = c$ ó $f'(x) = ax + b$. ? Utiliza la condición inicial del problema para encontrar la solución particular.	? Para iniciar la unidad, se sugiere que se utilicen situaciones o problemas en los que se conoce que la rapidez de cambio está dada por una función constante o lineal, y aprovechar el contexto de la situación para que resulte natural al alumno encontrar la función cuya derivada es la que se proporciona. Con ello, se propicia la significación del concepto de antiderivada. ? Para clarificar el papel que representa la condición inicial en la solución particular, es conveniente introducir una variante en el problema y solicitarle al alumno que encuentre la nueva solución particular. Para reforzarlo, es útil plantear el camino inverso; es decir, cambiar el parámetro relativo a la condición inicial en el modelo hallado, y pedir al estudiante que modifique la redacción del problema para que concuerde con esa modificación	Situaciones en las que se desconoce la función que las modela y se conoce su razón de cambio. La antiderivada. Primer acercamiento a la solución de ecuaciones de los tipos: $f'(x) = c$ $f'(x) = ax + b$ $f'(x) = ax^n$ La integral indefinida de una función. ? Concepto de integral indefinida. ? Relación entre la condición inicial y la constante de integración.

• Identifica que al modificarse la condición inicial, las funciones encontradas difieren en una constante. • Explica el significado de condición inicial y antiderivada. • Conoce la relación que existe entre la antiderivada y la integral indefinida. Maneja la notación respectiva. • Induce la fórmula de $\int ax^n dx$ • Utiliza una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales. • Avanza en el reconocimiento de estructuras al identificar la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para obtener una integral dada. • Identifica las transformaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. • Mejora su desempeño algebraico, a través de la resolución de ejercicios de integración.	• También es conveniente, retomar el análisis gráfico que se realizó en la unidad 4 de Cálculo I, como apoyo para visualizar que el proceso de integración da lugar a una familia de soluciones y resaltar el papel que juega en ella, la constante de integración. • Una vez que los alumnos saben encontrar la antiderivada de funciones constantes y lineales, es útil introducir la notación de la integral y plantear ejercicios graduados de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ para que a través del reconocimiento de patrones, induzcan la fórmula de integración correspondiente. Para obtener las propiedades: $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$ y $\int audx = a\int udx$ se sugiere introducir polinomios sencillos. De manera natural los alumnos integrarán cada término y mediante una reflexión guiada por el profesor, llegarán a la regla general. • Para introducir el método de sustitución, se sugiere incorporar pequeñas modificaciones a algunas integrales inmediatas e invitar al alumno a hacer “ajustes” para obtener la solución. También es útil, que el profesor muestre este método como la “inversión” de la regla de la cadena para el caso particular de potencias de funciones. Esto ayudará a que identifiquen la ***u*** comprueben si tienen ***du*** ó, en su caso, qué tipo de “ajuste” requieren para tenerla y procedan a aplicar la sustitución.	Fórmulas y métodos de integración. • Integrales inmediatas. • Cambio de Variable (sustitución). • Integración por partes.

? Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades de integrar productos de funciones y sabe que se desprende de la derivada de un producto. ? Utiliza el método de integración por partes.	? Se sugiere que el profesor muestre el método de integración por partes como el proceso inverso de la regla para calcular la derivada de un producto. Darles algunas sugerencias para la elección de ***u*** y ***v***, a través de los ejercicios que se realicen en clase, presentar algún ejemplo invirtiendo la elección y analizar con ellos qué sucede y porqué. ? Para finalizar, es útil hacerlos reflexionar sobre la dificultad para calcular integrales (a diferencia de lo que pasaba con las derivadas) y comentarles que existen por ello, otros métodos de integración.	

UNIDAD III. LA INTEGRAL DEFINIDA

Propósitos:

- Introducir el concepto de integral definida como una función-área para construir su significado. Relacionar los conceptos de derivada e integral en la formulación del teorema Fundamental del Cálculo.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: • Asocia el área bajo una curva con la solución a una situación dada. • Calcula el área bajo la gráfica de funciones constantes y lineales, auxiliándose de la figura geométrica respectiva. • Obtiene la función-área, que proporciona el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0, x]$, $[a, x]$, $[a, b]$. • Relaciona la antiderivada de una función con la función-área asociada. • Interpreta el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$,	• Se sugiere que los alumnos conozcan algunas lecturas sobre el desarrollo histórico del cálculo de áreas y sobre el surgimiento de la integral. • Se propone iniciar con problemas que involucren el cálculo de distancia, trabajo, presión, entre otros, de modo que los alumnos analicen la gráfica de la función constante o lineal asociada y perciban que dichos problemas se resuelven al calcular el área bajo la gráfica de esa función. • Se sugiere que se proceda a calcular el área bajo la gráfica de funciones del tipo $f(t) = c$, $f(t) = t$, $f(t) = at + b$ en intervalos cerrados de la forma $[0, x]$, $[a, x]$, $[a, b]$, para encontrar la función-área asociada. • Presentar por ejemplo, el problema de caída libre y preguntar por la distancia recorrida con el objetivo de interpretar la solución como un área. Con respecto a la representación del área desde a hasta x bajo la gráfica de f(x), se sugiere incorporar la notación $A(x) = \int_a^x f(t)dt$	Situaciones que se representan mediante áreas. • El área bajo la gráfica de una función constante o lineal. • El área como una función A(x). • La función área como una antiderivada. • Interpretación de áreas bajo la curva de funciones polinomiales. La integral definida. • Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos. • Definición. • Propiedades.

• Reconoce a la aproximación numérica como un método general para calcular el área bajo una curva. • Asocia el método de aproximación numérica para calcular un área con un proceso infinito. • Analiza el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para conocer si tiene un valor límite y cuál es éste. • Aproxima el área bajo una curva utilizando sumas de áreas. • Valora las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida. • Comprende la interrelación que se establece en el Teorema Fundamental del Cálculo. • Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo. • Calcula el área entre dos curvas.	• Para iniciar la aproximación numérica, es útil proponer a los alumnos la gráfica de una función sin darles su representación analítica, pedirles que calculen el área bajo la curva en un intervalo dado e inducirlos para que obtengan una aproximación al área a través de la suma de las áreas de los cuadrados de la cuadrícula de su cuaderno. • Conviene utilizar particiones que den lugar a segmentos de la misma longitud, en los ejemplos para el ilustrar el método de aproximación numérica al cálculo de áreas con funciones del tipo $f(x) = x^n$. • En el proceso de aproximar áreas bajo la gráfica de funciones del tipo $f(x) = x^n$ es conveniente que los alumnos construyan una tabla y con base en ella, analicen la tendencia de las sumas de las áreas retomando la noción de proceso infinito visto en la unidad 1 de Cálculo I. Contribuye a esto, dejar de tarea que hagan el cálculo con particiones más finas utilizando *Excel*. • Conviene utilizar un ejemplo que les permita visualizar la relación entre la función-área, la antiderivada y la integral como límite de sumas para enunciar (sin demostrar) lo que establece el Teorema Fundamental del Cálculo. • A partir de la forma en que se ha llegado al Teorema Fundamental del Cálculo, le resultará claro al alumno interpretar a la integral definida como: $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, donde F es cualquier antiderivada de f	Teorema Fundamental del Cálculo. • La función área como antiderivada. • Justificación del Teorema Fundamental del Cálculo mediante la función área. • Aplicaciones de la integral definida.

	? Es importante hacer ejercicios de aplicación que incluyan áreas entre curvas, trazar sus gráficas y calcular las integrales respectivas. También es útil, retomar alguno de los problemas sobre distancia, trabajo o presión, proponer variantes que den lugar a una función no lineal, y resolverlos con la integral definida.	

UNIDAD IV. MODELOS Y PREDICCIÓN

Propósitos:

- Culminar el estudio de la derivada y la integral con la construcción de un modelo que las involucra relacionado con situaciones de diversos contextos. Utilizar el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de las situaciones estudiadas.

TIEMPO: 12 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora en forma numérica, gráfica o algebraica, las condiciones de una situación dada. ? Identifica que el comportamiento de la rapidez de cambio asociada a la situación, se puede modelar a través del esquema: $\frac{dF}{dt} ? kF$? Reconoce que para obtener la función que modela el problema tiene que recurrir a la integral para obtener una anti-derivada.	? Para iniciar la unidad, es conveniente plantear a los alumnos el estudio de una situación “abierta”, por ejemplo, el crecimiento de una población, e invitarlos a que propongan los factores que intervienen en ella. Al sistematizar sus aportaciones y con preguntas dirigidas, es posible llegar a lo que significa la tasa de crecimiento y al hecho de que la rapidez de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la misma. Con ello, sólo se requiere usar la simbología para establecer la relación entre la función y su derivada, mediante el esquema: $\frac{dP}{dt} ? kP$? En esta etapa del curso, es muy probable que a los alumnos les quede claro que necesitan integrar para obtener $P(x)$, sin embargo, es necesario hacerles ver que requieren de un nuevo camino. Al presentar el método de separación de variables, es conveniente cuidar que no se queden con la idea errónea de que “dt pasa multiplicando”, pero sin caer en explicaciones teóricas que exceden los propósitos de este curso.	**Modelos y Predicción** Ejemplos de situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\frac{dF}{dt} ? kF$? Método de separación de variables. ? Análisis del modelo $F(t) = P_0 e^{kt}$. ? Predicción del comportamiento de $P(t)$ en el contexto de la situación.

? Conoce el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dF}{dt} ? kF$ y lo a aplica en algunos ejemplos. ? Toma en cuenta las condiciones iniciales para obtener la solución particular que representa a la situación, y llega a un modelo del tipo $F(t) = F_0\ e^{kt}$. ? Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. ? Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo F(t) = F0 ekt. dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas. ? Aprecia la importancia del modelo $P(t) = P_0\ e^{kt}$, al saber que se aplica en situaciones de índole diversa.	? Una vez hallada la solución $P(t) = e^{kt}$ se procedería a analizar su comportamiento general y a efectuar algunas predicciones de la población. Para ello, es conveniente contar con datos del INEGI del último censo (están disponibles en internet) tanto sobre la tasa de crecimiento, como del número de habitantes en el país y en el DF. Calcular el tamaño de la población en el futuro a través del modelo. Al hacerlo también para décadas pasadas y cotejar el resultado con los datos, contribuye a entender el papel que juega en él la constante de proporcionalidad (ligada a la tasa de crecimiento), ayuda a reflexionar sobre la importancia de los datos para alimentar los parámetros de un modelo y sobre la necesidad de construir modelos más refinados. ? Es importante plantear otras situaciones cuyo comportamiento es similar a la primera que se trabajó, de modo que aprecien la importancia de los modelos matemáticos cuyo énfasis se centra en el comportamiento de la situación modelada, y de ahí su carácter general. Entre otras situaciones que se estudian con $F(t) = F_0\ e^{kt}$. están: la desintegración radiactiva, la Ley de enfriamiento de Newton, la asimilación de un medicamento en el organismo, la propagación de una enfermedad. ? En los ejemplos de situaciones que se trabajen es importante utilizar el modelo para hacer predicciones. Los datos de la semivida del carbono 14 u otra sustancia radiactiva se incluyen en varios libros de la bibliografía, los de la propagación del sida, también son sencillos de conocer.	