Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Área Matemáticas

Programas de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral I

PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

UBICACIÓN DEL CURSO

En el Cálculo Diferencial e Integral, los conceptos de aproximación y límite están inmersos en el estudio de la variación, de la medida de la rapidez de cambio y de la suma continua de cambios acumulados; por ello, en el programa de este curso que representa el primer contacto del alumno con esta rama de la matemática, rica fuente de aplicaciones en muy diversos ámbitos, se sientan las bases para la gestación de los conceptos de derivada e integral, sin llegar al aspecto formal de los mismos.

El inicio del curso está dedicado a explorar, mediante el tratamiento tabular y gráfico, varios ejemplos de situaciones en las que intervienen procesos infinitos para que a través del reconocimiento de patrones, el alumno pueda describir su comportamiento, empiece a construir para sí el significado del concepto de límite y comprenda y maneje su notación. Los procesos infinitos constituyen uno de los ejes temáticos, por lo que se retoman paulatinamente en el estudio de la derivada y posteriormente de la integral, en el siguiente semestre.

En la segunda unidad, se inicia el estudio de la derivada a partir del análisis de la variación de funciones polinomiales, enfatizando el significado de razón de cambio. Mediante un proceso infinito ligado al cociente de Fermat, se llega a la derivada como la función que proporciona la razón de cambio instantánea. La intención de presentar la construcción de la derivada con funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, no sólo radica en que éstas son más sencillas y más conocidas por los alumnos, sino que a la vez, permiten avanzar en el estudio de la variación y del análisis gráfico. Así, en la función lineal, sobresale la invariabilidad de la pendiente (asociada a la razón de cambio) y el porqué su derivada es una función constante; en la cuadrática, la segunda variación permite analizar la concavidad; y la cúbica, se presta para estudiar los cambios de concavidad vinculados con la existencia de puntos de inflexión.

La tercera unidad está destinada a obtener las derivadas de funciones algebraicas por medio de las reglas y fórmulas de derivación. Éstas se introducen a través de ejemplos que permiten al estudiante entender cómo surgen y valorarlas como formas simplificadas de carácter general. Además, al integrar la algoritmia al estudio de la derivada como una función en sí misma, se amplían las posibilidades de aplicación a situaciones concretas y se enriquecen los recursos para recabar información sobre las características de la variación y la rapidez de cambio de la función que modela una situación o problema. Si bien, en todas las unidades se le da una presencia al manejo del registro algebraico, en ésta, cobra mayor relevancia ya que es necesario que el estudiante adquiera destreza en la aplicación de las fórmulas para obtener la derivada de funciones algebraicas.

La cuarta unidad representa un primer momento de síntesis. Recupera el aspecto algebraico y enriquece el análisis geométrico para profundizar en la comprensión de la relación existente entre una función y sus derivadas. Además, refuerza el concepto de derivada y permite extender el campo de sus aplicaciones a situaciones más complejas o nuevas, en particular, al campo de los problemas de optimización.

Con respecto al concepto de continuidad, éste subyace a lo largo del curso aún cuando no forma parte explícita de la temática; por lo cual debe trabajarse intuitivamente (sobre todo en las funciones que presentan discontinuidades) para propiciar la formulación de dicho concepto en cursos posteriores de cálculo.
Por último, no obstante que en el programa no existe una unidad destinada al estudio de la integral, en las dos últimas, se sientan las bases de este concepto, al utilizar la o las derivadas de una función para obtener información sobre la función misma.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el primer curso de cálculo, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.
- ✍ Adquiere una visión del concepto de límite, a través del análisis de la representación tabular y gráfica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- ✍ Relaciona a la derivada de una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- ✍ Maneja de manera integrada las diversas interpretaciones de la derivada y las utiliza para obtener y analizar información sobre una función.
- ✍ Utiliza adecuadamente las técnicas de derivación y ubica a las fórmulas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.
- ✍ Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	Nombre de la unidad	Horas
I	Procesos Infinitos y la Noción de Límite	12
II	La Derivada: Estudio de la Variación y la Razón de Cambio	16
III	Derivación de Funciones Algebraicas	16
IV	Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización	20

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Bittinger, Marvin. *Cálculo para Ciencias Económico- administrativas*. Séptima edición, Addison Wesley, Colombia,2002.

Goldstein, L. J. *et. al. Cálculo y sus aplicaciones*, Prince - Hall Hispanoamericana, México, 1987.

Hughes, Deborah *et. al. Cálculo Aplicado*, CECSA, México, 2002.

Salinas, Patricia, *et. al*. *Elementos del Cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

Stewart, James, *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*, Thomson – Learning, Cuarta Edición, 2001.

Stein, Sherman y BARCELLOS, A. *Cálculo y Geometría Analitíca*. *1*, McGraw – Hill, Colombia, 1995.

Warner, Stefan y COSTENOBLE, Steven. *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición, Thomson, México, 2002.

LECTURAS EDUCATIVAS

Filloy, Eugenio *et. al*. *Matemática Educativa*. Fondo de Cultura Económica, México, 2003.

"*El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial*".

Cantoral, Ricardo. *Matemática Educativa*. *Un Estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

EVALUACIÓN

En estos programas no se incluyen aspectos relativos a la evaluación porque la comisión encargada de su elaboración, considera que el problema de la evaluación en las asignaturas de matemáticas requiere de una mayor reflexión y tiempo del que se dispuso para revisar y ajustar los programas, de modo que fuera posible plantear sugerencias que realmente incidan en esta problemática.

UNIDAD I. PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

Propósitos:

✍ Explorar diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica y simbólica para propiciar un acercamiento al concepto de límite.

TIEMPO: 12 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno*:* ? Utiliza procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos. ? Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: material concreto, diagramas, gráficas, tablas o explicaciones verbales. ? Reconoce un proceso como una acción que produce un resultado, este proceso será infinito cuando se pueda producir siempre un resultado más. ? Distingue un proceso infinito de uno que no lo sea.	? Mostrar ejemplos que involucren procesos infinitos en los cuales se tiene un resultado límite que es posible predeterminar. ? Es conveniente plantear problemas que conduzcan a encontrar patrones numéricos, geométricos o simbólicos de procesos infinitos como los siguientes: ✍ Problema del saltamontes (mitad del segmento, después la mitad, . . .) ✍ Representar $\frac{1}{3}$ en su forma decimal $\frac{1}{3} ? 0.3 ? 0.03 ? 0.003 ? ...$? Dividir un cuadrado de área uno a la mitad, tomar una mitad y nuevamente dividirla a la mitad, y así sucesivamente. Calcular las áreas de cada sección e inferir hacia qué valor se acerca el área seccionada y hacia dónde se acerca la suma de las áreas seccionadas.	**PROCESOS INFINITOS** Situaciones que dan lugar a procesos infinitos. Comportamiento de un proceso infinito: Representación tabular y gráfica. Representación simbólica de procesos infinitos: ? *Discretos*. ? *Continuos*. **NOCIÓN DE LÍMITE** Acercamiento al concepto de límite de una función. Notaciones de límite: - $\underset{x ? ?}{f(x) ? L}$ - $\underset{x ? a}{f(x) ? L}$ - $\lim\limits_{x ? a} f(x) = L$

? Resuelve problemas de diversos contextos que involucran en su solución, procesos infinitos. ? Utiliza las representaciones gráfica, tabular y algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son y a la larga, cómo son éstos. ? Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen. ? Interpreta la representación simbólica de procesos infinitos discretos y continuos como una forma de expresar la solución exacta de dichos procesos.	? Inscribir polígonos regulares en un círculo y determinar el resultado límite tanto de sus perímetros como de sus áreas desde el punto de vista geométrico; inferir los valores numéricos de dichos límites. ? Resolver ecuaciones de la forma $a^x = b$ a través de un proceso infinito que aproxima el valor de la solución ? Hacer énfasis en el hecho de que una sucesión permite expresar de forma simbólica procesos infinitos. ? Como un primer acercamiento al concepto de límite de una función, es pertinente trabajar ejemplos discretos para analizar los casos en donde $n ?\ 8$. ? Es útil considerar la manipulación de sucesiones como un objeto que permite expresar un proceso infinito discreto que puede tener o no tener límite. ? Considerar que la simbolización $\lim_{n? \ ?} a_n ? b$ permite representar procesos infinitos discretos que tienen un valor límite. ? Conviene proponer tareas que muestren que dado un número real, existen diferentes sucesiones cuyos términos permiten acercarse al punto dado de tres maneras: siempre con valores mayores, siempre con valores menores y con valores mayores y menores al número dado.	

	? Darle significado a la simbolización $f(x) ? \ L$ cuando $x ? \ ?$ a partir de las representaciones tabular y gráfica de funciones en las cuales la relación entre sus variables establecen procesos infinitos que corresponden a la simbolización mencionada. ? A partir de la construcción de relaciones que surgen con base en las variables de una función que modela una situación real, establecer procesos infinitos. Por ejemplo, la velocidad instantánea a partir de la relación distancia – tiempo; la distancia a partir de la relación velocidad – tiempo; como consecuencia dar significado a la simbolización $f(x) ? \ L$ cuando $x ? \ a$. ? Propiciar que la simbolización de $\lim_{x ? \ a} f(x) ? L$ se interprete como la noción dinámica de que los valores de una función se aproximan a un valor límite cuando los valores en el dominio se aproximan a algún valor dado.	

UNIDAD II. LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO.

Propósitos:

- Analizar la variación y la razón de cambio mediante problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primer, segundo o tercer grado para construir el concepto de derivada con apoyo de procesos infinitos y la noción de límite.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explica el significado de la pendiente de una función lineal en el contexto de un problema dado. ? Elabora una tabla, dibuja la gráfica y construye una expresión algebraica asociadas al estudio de problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primero, segundo o tercer grado. ? Identifica que una función lineal tiene variación constante, en intervalos del mismo tamaño. ? Identifica que en una función cuadrática, el cambio del cambio es constante en intervalos del mismo tamaño.	? Presentar problemas cuyo modelo sea una función lineal con el objetivo de estudiar el significado de la pendiente, éstos pueden ser de velocidad, temperatura, costo, entre otros. Los problemas podrán modelarse a través de una tabla, su gráfica y su forma algebraica. ? En la representación tabular es conveniente tomar valores de la variable independiente igualmente espaciados, para calcular la diferencia de las imágenes y establecer relaciones con la representación gráfica y la algebraica. ? En la representación tabular, para modelos cuadráticos y cúbicos, calcular las diferencias de las diferencias, hasta que por primera vez sean constantes y establecer relaciones con las representaciones gráfica y algebraica.	Estudio de la variación ? Situaciones que se modelan con funciones polinomiales de 1°, 2° y 3° grado. ? La representación de su variación en forma tabular, gráfica y algebraica. ? Comparación de la razón de los cambios en intervalos del mismo tamaño. ? Cambios de los cambios. Razón de cambio, medición de la variación.

? Infiere que el n-ésimo cambio es constante para funciones polinomiales de grado n. ? Calcula la razón de cambio de una función polinomial, en un intervalo dado. ? Utiliza procesos infinitos como un camino para obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite. ? Identifica a la derivada de una función polinomial de primer, segundo y tercer grado en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio. ? Calcula la derivada de funciones polinomiales usando: $f'(a) = \underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.	? A través de problemas como el de caída libre, iniciar el análisis de la velocidad promedio en un intervalo de tiempo y con ayuda de los procesos infinitos aproximarse a la velocidad instantánea en un punto; la gráfica de la función y su tabla ayudará al análisis de dichos problemas. ? En problemas cuyo modelo sea una función de segundo grado, analizar su razón de cambio en un intervalo, y posteriormente calcular la razón de cambio instantánea. En el análisis de la razón de cambio instantánea es conveniente utilizar la noción de límite como una herramienta. ? Analizar la razón de cambio en un intervalo y la razón de cambio instantánea en problemas que se modelen con funciones polinomiales de tercer grado, por ejemplo; la razón de cambio del volumen en una caja. ? Una vez que se haya realizado el análisis de la razón de cambio en diferentes problemas y haber trabajado las razones de cambio instantáneas como un proceso infinito, definir la derivada de una función y calcular derivadas para polinomios.	? La pendiente de la función lineal como razón de cambio constante en el contexto del problema. ? Razón de cambio promedio en intervalos del mismo tamaño de funciones polinomiales de segundo y tercer grado. ? La razón de cambio promedio en el contexto del problema. ? La razón de cambio instantánea en el contexto del problema. ? Concepto y notación de derivada. ? Representación algebraica. $\underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

UNIDAD III. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Propósitos:

- ✍ Continuar el estudio del concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica, buscando que el alumno reconozca a las reglas de derivación como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° o 3° grado usando la definición: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. ? Identifica el patrón de comportamiento de las derivadas obtenidas con el límite del cociente de Fermat, y encuentra la fórmula de la derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$. ? Calcula la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación.	? Se sugiere utilizar la fórmula $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. para calcular derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$. Es conveniente iniciar con ejemplos en los que $c = 1$ y posteriormente dar otros valores. ? Proponer ejercicios de cálculo de la derivada de potencias y de polinomios; propiciar que el alumno infiera una forma económica de calcular dichas derivadas. ? A través del cálculo de la derivada de polinomios conjeturar las reglas de derivación para: ✍ Suma de funciones ✍ Producto de una constante por una función. ✍ Función constante. ? Usar ejemplos de potencias de polinomios de primer y segundo grado para introducir la regla de la cadena.	Derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$. Reglas de derivación Constante por una función ? Suma ? Producto. ? Cociente. ? De la cadena con funciones del tipo (f(x))n con f(x) un polinomio. Notación. Problemas de aplicación. ? Cálculo de tangentes. ? Cálculo de velocidades.

? Reconoce la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función para aplicar correctamente las reglas de derivación. ? Identifica las relaciones existentes entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada. ? Obtiene la velocidad instantánea como la derivada de la función de posición y la aceleración como la derivada de la velocidad. ? Obtiene la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función. ? Da significado a la derivada de una función en el contexto de un problema.	? Mediante productos de polinomios se puede introducir la regla del producto; por ejemplo, se puede pedir que obtengan la derivada de $x(x^2+ 3x)$. Si por similitud con la suma lo realizan como el producto de las derivadas, sugerir que primero hagan la multiplicación y luego deriven para corroborar que no obtuvieron lo mismo y así evidenciar que la derivada de un producto no se comporta de igual manera que la de la suma. Con el mismo ejercicio guiarlos para que hallen la regla correcta. ? La regla del cociente se puede obtener a partir de la del producto, escribiendo el cociente. como una multiplicación. ? Proponer ejemplos de la interpretación de la derivada cuyos modelos no sean polinomios, y resolverlos usando las técnicas de derivación. ? Dibujar la gráfica de una función y la de su derivada para hacer comparaciones; buscando una primera aproximación de la identificación de las relaciones entre ambas. Por ejemplo: máximos y mínimos de la función, intervalos donde la función es creciente o decreciente.	

UNIDAD IV. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Propósitos:

- Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Infiere a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad. ? Bosqueja la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma. ? Determina gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.	? Es conveniente aprovechar el conocimiento adquirido en los cursos anteriores sobre las funciones cuadráticas. En particular, las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$ ayudan a comprender tanto lo que es un punto máximo ó mínimo, al vincular el comportamiento gráfico de la función (creciente o decreciente) con el signo de la pendiente de las tangentes (positivo, negativo), como la noción de punto crítico (derivada cero). Esto ayuda a establecer el criterio de la primera derivada. ? Con la función $f(x) = x^3$ se muestra la insuficiencia de la condición de que un punto critico debe ser máximo o mínimo; lo que permite introducir el concepto de punto de inflexión. ? Es conveniente después de analizar, identificar y definir gráficamente punto crítico y concavidad, obtener máximos, mínimos y puntos de inflexión en forma algebraica.	Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas. Comportamiento gráfico de una función. ? Crecimiento y decrecimiento de funciones ? Puntos críticos. ? Concavidad. ? Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivada. ? Puntos de inflexión. ? Gráfica de f (x) a partir de las gráficas de ,f ’(x) y f ’’(x) y viceversa

? Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones. ? Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada. ? Grafica una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada. ? Comprende que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de *f, f '* y *f ''*. ? Resuelve problemas que involucran máximos y mínimos de una función.	? Una vez que el alumno ha comprendido el significado de máximo, mínimo y punto de inflexión, a través de la primera derivada, es conveniente para estudiar la concavidad, utilizar alguna función de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo, por ejemplo $f(x) = x^3 - 12x$. Realizar el análisis gráfico del comportamiento por intervalos tanto de la función como de la primera y segunda derivada para obtener las relaciones entre todas ellas y concluir con el criterio de la segunda derivada. Mostrar con este tipo de ejemplos (polinomios de grado tres o mayor) que el criterio de la segunda derivada es más práctico que el otro. ? Conviene construir el bosquejo de la gráfica de la derivada a través de la gráfica de la función y viceversa, ya que permite al alumno (en el estudio posterior de la antiderivada) asociar la forma de la curva con el significado geométrico de la derivada. ? Finalmente, hacer ver que dada la gráfica de una función o la de su derivada, se obtiene información sobre el comportamiento gráfico de la otra. ? En cuanto a los problemas de optimización, es conveniente iniciar con problemas cuyo modelo no sea difícil de representar como una función real de variable real, y utilizar en primera instancia, su gráfica para hacer predicciones. ? También es útil, enfatizar en los ejemplos que resuelva el profesor, la forma en que la condición que establece el problema entre las variables (por ejemplo ancho y largo; radio y altura, etc.) permite que la función a optimizar se transforme en una función con una sola variable independiente.	Problemas de optimización.